

УДК 004.942: 519.2

doi:10.21685/2072-3059-2022-3-5

Методика вывода функций вероятности и плотности вероятности продолжительности обработки запросов инфокоммуникационной системой с параллельно-последовательными равномерно распределенными случайными продолжительностями действий

М. М. Бутаев¹, А. А. Тарасов²

^{1,2}Научно-производственное предприятие «Рубин», Пенза, Россия

¹nts@npp-rubin.ru, ²mail@npp-rubin.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Развитие математических моделей, используемых при проектировании инфотелекоммуникационных систем, обусловлено повышением требований к теоретическим методам проектирования современных средств автоматизации. Объектом исследования является методика вывода аналитических выражений вычислений времени выполнения действий в стохастической сети PERT. Предметом исследования являются методика аналитического расчета продолжительности параллельно-последовательной обработки запроса элементами системы с независимыми равномерно распределенными случайными продолжительностями действий. Цель работы – совершенствование методов расчета вероятностно-временных характеристик инфокоммуникационных систем. *Материалы и методы.* При выводе функций распределения вероятности и плотности вероятности временных характеристик применены методы теории вероятности. *Результаты.* Приведены схема вывода формул при небольшом количестве параллельных и последовательных действий по обработке запросов, а также формулы функций вероятности и плотности вероятности трех параллельно-последовательных независимых равномерно распределенных случайных величин. *Выводы.* Полученные аналитические выражения значений продолжительности параллельно-последовательно выполняемых действий по обработке данных инфокоммуникационной системой повышают адекватность оценки ее вероятностно-временных характеристик.

Ключевые слова: независимые равномерно распределенные случайные величины, плотность вероятности, функция распределения, параллельно-последовательная обработка, PERT, инфокоммуникационная система

Благодарности: авторы благодарят Лукина Д. В. за ценные предложения по оформлению текста статьи.

Для цитирования: Бутаев М. М., Тарасов А. А. Методика вывода функций вероятности и плотности вероятности продолжительности обработки запросов инфокоммуникационной системой с параллельно-последовательными равномерно распределенными случайными продолжительностями действий // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2022. № 3. С. 46–55. doi:10.21685/2072-3059-2022-3-5

Method for deriving the probability function and probability density of the duration of processing requests by an infocommunication system with parallel sequential uniformly distributed random durations of actions

M.M. Butaev¹, A.A. Tarasov²

© Бутаев М. М., Тарасов А. А., 2022. Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License / This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

^{1,2}Research and Production Enterprise “Rubin”, Penza, Russia¹nts@npp-rubin.ru, ²mail@npp-rubin.ru

Abstract. *Background.* Improving the adequacy of mathematical models used in the design of infotelecommunication systems is due to the increased requirements for theoretical methods for designing modern automation tools. The object of the study is an analytical method for calculating the execution time of actions in the PERT stochastic network. The subject of the study is the method of analytical calculation of the duration of parallel-sequential processing of a request by system elements with independent uniformly distributed random durations of actions. The purpose of the work is to improve the methods for calculating the probabilistic-temporal characteristics of infocommunication systems. *Materials and methods.* When deriving the probability distribution functions and the probability density of temporal characteristics, methods of probability theory were applied. *Results.* A scheme for deriving formulas for a small number of parallel and sequential actions for processing requests, as well as formulas for the probability and probability density functions of three parallel-sequential independent uniformly distributed random variables are given. *Conclusions.* The obtained analytical expressions for the duration values of parallel-sequentially performed actions for data processing by the infocommunication system increase the adequacy of the assessment of its probabilistic-temporal characteristics.

Keywords: independent uniformly distributed random variables, probability density (PDF), distribution function (CDF), parallel-sequential processing, PERT, infocommunication system

Acknowledgements: The author extends gratitude to D.V. Lukin for valuable suggestions on the design of the article.

For citation: Butaev M.M., Tarasov A.A. Method for deriving the probability function and probability density of the duration of processing requests by an infocommunication system with parallel sequential uniformly distributed random durations of actions. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Tekhnicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Engineering sciences.* 2022;(3):46–55. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3059-2022-3-5

Введение

При проектировании и модернизации инфокоммуникационных систем необходимо обеспечить улучшение расчетных методов оценки вероятностно-временных характеристик предлагаемых технических решений. Расширение области использования теоретических методов анализа рисков принимаемых решений стимулирует усовершенствование методов расчета характеристик случайных величин на основе теории вероятности, в частности поиск более адекватных функций их распределения. Общеизвестным аппаратом расчета комплексных параметров многоузловых систем обслуживания являются сети PERT.

Стохастические сети PERT являются разновидностью ациклических направленных графов со стохастически определенными весами дуг. Они традиционно используются в оценках продолжительности работ и бизнес-процессов [1–3]. Сети PERT применяются в информатике для оценки производительности параллельных программ [4–6], в расчетах временных параметров распространения сигналов в цифровых схемах [7], в оценках производительности процессов обработки сообщений [8], в определении вероятностно-временных характеристик информационно-телекоммуникационных систем¹ [9] и в других приложениях.

¹ ГОСТ 34.602–89. Техническое задание на создание автоматизированной системы.

Дуги сети PERT представляют действия, которые в общем случае имеют случайную продолжительность с соответствующим распределением вероятностей. Все действия предполагаются независимыми друг от друга. Узлами (событиями) сети обозначаются технологическая упорядоченность этих действий, начало и окончание действия. Все действия должны быть завершены при входе в узел, до начала действий, выходящих из узла. В сети есть один узел-исток, из которого дуги только выходят, и один узел-сток, в который дуги только входят.

Сети PERT используются для определения критического пути [9], вместе с тем важен также расчет продолжительности всей сети. Функции распределения продолжительности сети несложно определить методами теории вероятности, но аналитические формы известны только для наиболее простых сетей. При расчете временных параметров больших сетей используется основная предельная теорема теории вероятности, и в этом случае применяется нормальный закон распределения. О недостатках такой аппроксимации написано много работ [1, 10]. Аппроксимация функций распределения нормальным законом длительности сети приводит к количественным и качественным искажениям из-за определения функции Гаусса на интервале $[-\infty, +\infty]$. С теоретической точки зрения это вполне приемлемое решение, однако на практике сложно обосновать наличие вероятности малых и больших значений случайной величины, «хвостов» нормального распределения, исходя из физической интерпретации случайных величин.

Сложности точного аналитического расчета функций распределения продолжительности сети обусловлены существенным увеличением количества параметров и сложностями их функциональных зависимостей при увеличении количества действий. Основными ограничениями на использование кусочно-полиномиальных функций для описания функции распределения продолжительности сети являются существенное (пропорционально числам Стирлинга) увеличение количества временных подынтервалов и соответствующее увеличение громоздкости формул, особенно при записи на бумажный носитель, при увеличении количества действий.

В статье [11] предложено распределение вероятности продолжительности сети и субсетей описывать кусочно-полиномиальными функциями, однако аналитические зависимости для таких функций от временных параметров действий и взаимосвязей этих действий в более общем случае не определены. Более удобным для практического использования является комбинированное описание продолжительности действия суммой детерминированной и случайной составляющих с равномерным законом распределения [12]. Развитие исследований в этом направлении позволит получить более общие аналитические средства для повышения адекватности оценки характеристик продолжительности действий.

Материалы и методы

Аналитическое определение функций распределения вероятности $FN(t)$ и определение плотности вероятности $fN(t)$ распределения продолжительности сети N действий позволяют наиболее полно определять характеристики случайной величины (СВ) недетерминированной составляющей продолжи-

тельности действий [13]. Функции $FN(t)$ и $fN(t)$ N независимых равномерно распределенных СВ для расчета продолжительности последовательно [14] и параллельно [12] выполняемых действий определены для достаточно общих случаев. Вероятность завершения субсети, когда завершатся все параллельные действия, определяется произведением вероятностей завершения параллельных действий: $FN(t) = F^1(t) F^2(t) \dots F^n(t)$, либо как закон распределения максимума N СВ [15]. Вероятность завершения последовательно исполняемых действий $FN(t)$ и $fN(t)$ определяется через свертку, например:

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(u) f_2(t-u) du.$$

Плотность вероятности и функция распределения рассматриваемых СВ:

$$f_1(t) = \frac{1}{b_1 - a_1} [H(t - a_1) - H(t - b_1)];$$

$$F_1(t) = \frac{t}{b_1 - a_1} [H(t - a_1) - H(t - b_1)] + H(t - b_1),$$

где $H(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0; \\ 1, & 0 < t, \end{cases}$ – обобщенная функция Хевисайда, или единичная ступенчатая функция.

Результаты

Методика решения сформулированной задачи заключается в следующем порядке действий. При исследовании параллельно-последовательной сети для последовательно выполняемых действий используется равномерное распределение $U_i[a_i; b_i]$. Формулы вероятности завершения субсети параллельно выполняемых действий $FPJ(t)$ и $fpJ(t)$, $j = \overline{1, J}$, $I + J = N$, определяются в первую очередь. Более общие формулы для сети определяются как сумма СВ с ранее определенным общим распределением, в частности $FPJ(t)$, с равномерным распределением, при этом используется свойство [16]:

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{b-a} [F_n(x-a) - F_n(x-b)]. \quad (1)$$

Например, для сети из субсети с двумя параллельными и одним последовательным действиями определяется $FP2(t)$ [12], затем

$$f_3(x) = \frac{1}{b_3} [FP2(x) - FP2(x - b_3)]$$

и далее $F_3(x) = \int f_3(x) dx$ (рис. 1).

Пусть в субсети с параллельными действиями СВ времени завершения j -го действия независима и имеет равномерное распределение $t_j \in [a_j; b_j]$, $0 \leq a_j$, $a_j < b_j$. Параллельно выполняемые действия начинаются одновременно

при $t = 0$. В интервале $[0; a_{\max}]$, где $a_{\max} = \max_{j=1,J} a_j$, субсеть параллельно выполняемых действий достоверно не завершается, пока не могут завершиться все действия субсети. Завершение возможно с вероятностью $FPJ(t)$ на интервале $[a_{\max}; b_{\max}]$, где $b_{\max} = \max_{j=1,J} b_j$. При $t > b_{\max}$ субсеть параллельно выполняемых действий достоверно завершится.

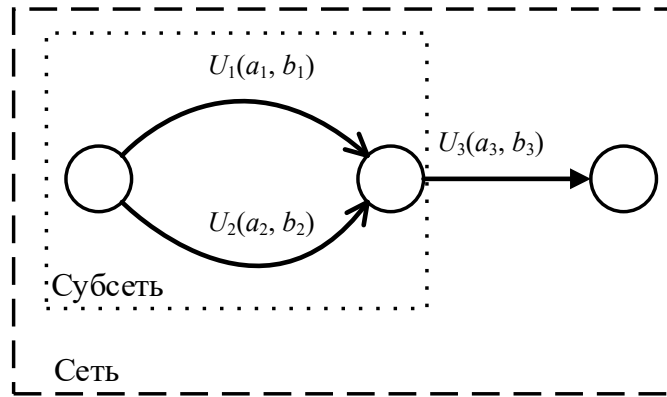


Рис. 1. Сеть из субсети с двумя параллельными и одним последовательным действиями

Границы подынтервалов кусочно-полиномиальных функций $FPJ(t)$ и $fpJ(t)$ определяются значениями $b_j, j = 1, \dots, J$. Положение границ подынтервалов упорядочено по возрастанию, наибольшее значение совпадает с $b_{\max}$. Для определения порядка следования границ подынтервалов используется массив $bb(K)$, полученный сортировкой массива $b(J)$ по убыванию значений элементов. Переменная $K \leq J$ – количество перекрывающихся подынтервалов субсети. При сортировке $bb(K)$ в массиве индексов $I(K)$ сохраняются соответствующие номера параллельных действий.

Простейшая рассматриваемая параллельно-последовательная сеть состоит из субсети из двух параллельных действий с $U_1[a_1; b_1]$ и $U_2[a_2; b_2]$ и последовательного действия $U_3[a_3; b_3]$. Из [12] следует:

$$FP2(t) = \frac{\theta_1 \theta_2}{\vartheta_1 \vartheta_2} [H(t - a_{\max}) - H(t - b_{\min})] + \\ + \frac{\theta_1}{\vartheta_1} [H(t - b_{\min}) - H(t - b_{\max})] + H(t - b_{\max}).$$

Согласно (1) получаем

$$f3(t) = \frac{1}{b_3} \left\{ \frac{\theta_1 \theta_2}{\vartheta_1 \vartheta_2} [H(t - a_{\max}) - H(t - b_{\min})] + \frac{\theta_1}{\vartheta_1} [H(t - b_{\min}) - H(t - b_{\max})] + \right. \\ \left. + H(t - b_{\max}) - \frac{(\theta_1 - b_3)(\theta_1 - b_3)}{\vartheta_1 \vartheta_2} [H(t - b_3 - a_{\max}) - H(t - b_3 - b_{\min})] - \right.$$

$$-\frac{(\theta_1 - b_3)}{\vartheta_1} \left[H(t - b_3 - b_{\min}) - H(t - b_3 - b_{\max}) \right] - H(t - b_3 - b_{\max}) \Big\},$$

следовательно,

$$\begin{aligned} F_3(t) = & \frac{1}{b_3} \left\{ \frac{H(t - a_{\max})}{\vartheta_1 \vartheta_2} \left[\frac{t^3 - a_{\max}^3}{3} - \frac{a_1 + a_2}{2} (t^2 - a_{\max}^2) + a_1 a_2 (t - a_{\max}) \right] + \right. \\ & + \frac{H(t - b_{\min})}{\vartheta_1 \vartheta_2} \left[-\frac{t^3 - b_{\min}^3}{3} + \frac{a_1 + a_2}{2} (t^2 - b_{\min}^2) - a_1 a_2 (t - b_{\min}) \right] + \\ & + \frac{H(t - b b(1))}{\vartheta_1} \left[\frac{t^2 - b_{\min}^2}{2} - a_1 (t - b_{\min}) \right] + \frac{H(t - b_{\max})}{\vartheta_1} \left[-\frac{t^2 - b_{\max}^2}{2} + a_1 (t - b_{\max}) \right] + \\ & + H(t - b_{\max})(t - b_{\max}) - \frac{H(t - b_3 - a_{\max})}{\vartheta_1 \vartheta_2} \left[\frac{t^3 - (b_3 + a_{\max})^3}{3} - \right. \\ & - \frac{a_1 + a_2 + 2b_3}{2} (t^2 - (b_3 + a_{\max})^2) + (a_1 + b_3)(a_2 + b_3)(t - b_3 - a_{\max}) \Big] + \\ & + \frac{H(t - b_3 - b_{\min})}{\vartheta_1 \vartheta_2} \left[\frac{t^3 - (b_3 + b_{\min})^3}{3} - \frac{a_1 + a_2 + 2b_3}{2} (t^2 - (b_3 + b_{\min})^2) + \right. \\ & + (a_1 + b_3)(a_2 + b_3)(t - b_3 - b_{\min}) \Big] + \frac{H(t - b_3 - b b(1))}{\vartheta_1} \left[-\frac{t^2 - (b_3 + b_{\min})^2}{2} + \right. \\ & + (a_1 + b_3)(t - b_3 - b_{\min}) \Big] + \frac{H(t - b_3 - b_{\max})}{\vartheta_1} \left[\frac{t^2 - (b_3 + b_{\max})^2}{2} - \right. \\ & \left. - (a_1 + b_3)(t - b_3 - b_{\max}) \right] - H(t - b_3 - b_{\max})(t - b_3 - b_{\max}) \Big\}, \end{aligned}$$

где

$$\theta_1 = t - a(I(1)), \quad \theta_2 = t - a(I(2)),$$

$$\vartheta_1 = b(I(1)) - a(I(1)), \quad \vartheta_2 = b(I(2)) - a(I(2)) -$$

вспомогательные переменные; $b_{\min} = \min_{j=1, J} b_j$.

Формулы для плотности вероятности продолжительности сети из двух параллельных и двух и более последовательных действий также определяются с помощью формулы (1). Формулы для трех параллельных [12] и последовательных действий определяются аналогично. В тексте статьи не приводятся эти формулы из-за их громоздкости.

Формулы для вычислений при больших значениях N , I , J можно получить обобщением вышеприведенных выражений для $N = 3$.

Обсуждение

Пример 1. В системе поддержки принятия решений лицо, принимающее решение, формулирует решение на основании сообщений от первого и от второго источников. Сообщение от первого источника поступает через $2,5 \pm 1,5$ условных единиц времени (уев), от второго – через 2 ± 1 уев, латентное время на выработку решения – $3 \pm 0,5$ уев. Следовательно, решение может быть выработано не ранее $2,5 + 1$ уев и не позже $3,5 + 4$ уев. На рис. 2 приведены графики функций $fp2(t)$, $FP2(t)$ для субсети двух параллельных действий с интервалами неопределенности завершения действий $U_1(1; 4)$, $U_2(1; 3)$ и последовательного действия с интервалом неопределенности завершения действия $U_3(0; 1)$; графики для сети двух параллельных действий $f2(t)$ с распределениями $U_1(1; 4)$, $U_2(1; 3)$; графики функций $f4(t)$, $F4(t)$ для субсети двух параллельных действий с интервалами неопределенности завершения действий $U_1(1; 4)$, $U_2(1; 3)$ и двух последовательных действий с интервалом неопределенности завершения действия $U_3(0; 1)$ и $U_4(0; 2)$.

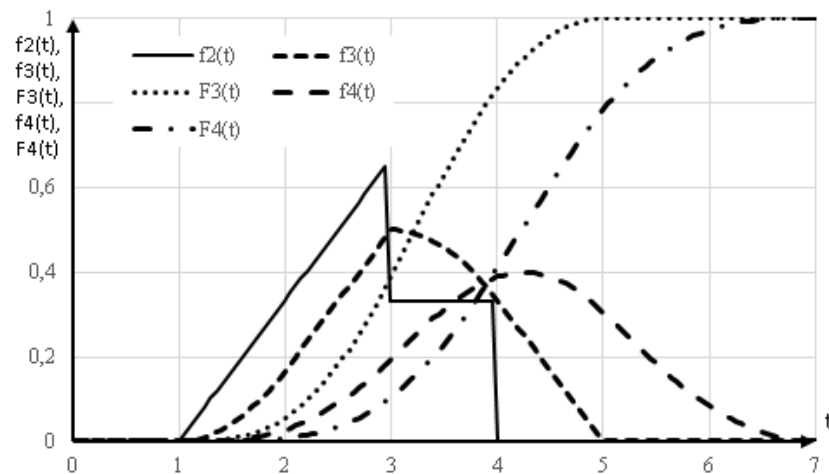


Рис. 2. Графики функции для двух параллельных и одного и двух последовательных действий

Пример 2. Три фрагмента программы выполняются одновременно на трех процессорных элементах, результаты их работы объединяются для дальнейшей последовательной обработки. Продолжительности выполнения параллельных фрагментов программы имеют равномерное распределение $U_1(1; 3)$, $U_2(1; 4)$, $U_3(1; 2)$ уев, время последовательной обработки $U_4(0; 4)$ уев. Графики функций $fp3(t)$, $FP3(t)$ для субсети трех одновременно выполняемых фрагментов программы с интервалами неопределенности завершения $U_1(1; 4)$, $U_2(1; 3)$, $U_3(1; 2)$ уев и общего времени $f4(t)$, $F4(t)$ параллельной и последовательной обработки с интервалом неопределенности завершения $U_4(0; 4)$ приведены на рис. 3.

Приведенные примеры иллюстрируют простоту и прозрачность расчета длительностей действий с равномерным законом распределения длительностей отдельных действий.

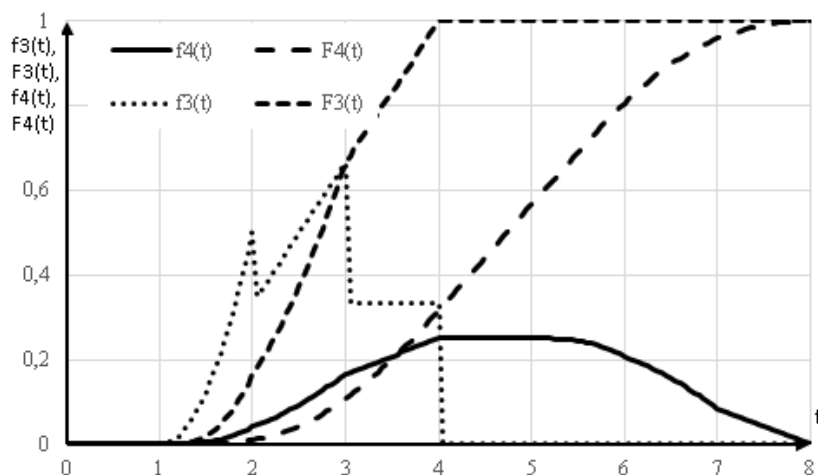


Рис. 3. Графики функции для трех параллельных и одного последовательно исполняемых фрагментов программы

Исходные данные задаются общепринятыми в практике проектирования систем параметрами и дополнительного обоснования не требуют. Результаты расчетов граничных значений распределения продолжительности сети также очевидны без дополнительных обоснований. Численные значения законов распределений СВ по приведенным формулам могут быть получены с необходимой точностью без затруднений на ЭВМ.

Заключение

Разработана методика вывода аналитических выражений функций вероятности и плотности вероятности продолжительности параллельно-последовательно исполняемых действий стохастической сети PERT, приведены формулы для трех параллельно-последовательных независимых равномерно распределенных случайных величин продолжительностей действий. Полученные аналитические выражения значений продолжительности параллельно-последовательно исполняемых действий по обработке данных инфокоммуникационной системой позволяют вычислять вероятностно-временные характеристики с требуемой высокой точностью. Использование равномерного закона (только два используемых на практике параметра) для задания и вычисления продолжительностей действий облегчает обоснование модели, тем самым улучшает качественные и количественные результаты.

Список литературы

1. Голенко-Гинзбург Д. И. Стохастические сетевые модели планирования и управления разработками. Воронеж : Научная книга, 2010. 284 с.
2. Pozewaunig H., Eder J., Liebhart W. ePERT: Extending PERT for Workflow Management Systems // Proceedings of the First East-European Symposium on Advances in Databases and Information Systems, (ADBIS'97). St. Petersburg, 1997. P. 1–13.
3. Chanas S., Dubois D., Zielinski P. Criticality analysis in activity networks under incomplete information // Proceedings of the 2nd International Conference in Fuzzy Logic and Technology. 2001. P. 233–236.
4. Trogemann G., Gente M. Performance analysis of parallel programs based on directed acyclic graphs // Acta Informatica. 1997. Vol. 34. P. 411–428.

5. Ali Sedaghatbaf, Mohammad Abdolahi Azgomi. Software Architecture Modeling and Evaluation Based on Stochastic Activity Networks // IFIP International Federation for Information Processing. 2015. 6th International Conference on Fundamentals of Software Engineering. 2015. P. 46–53.
6. Sharma V. S., Trivedi K. S. Quantifying software performance, reliability and security: An architecture-based approach // Journal of Systems and Software. 2007. Vol. 80. P. 493–509.
7. Nadas A. Probabilistic PERT // IBM Journal of Research and Development. 1979. Vol. 23, № 3. P. 339–347.
8. Лен В. Л. Оценка времени работы командного пункта армии военно-воздушных сил и противовоздушной обороны на этапе принятия решения на боевые действия // Военная мысль. 2020. № 8. С. 97–100.
9. Hajdu M., Bokor O. The Effects of Different Activity Distributions on Project Duration in PERT Networks // 27th IPMA World Congress. Procedia - Social and Behavioral Sciences. 2014. Vol. 119. P. 766–775.
10. Ebong D. W. A Review of Activity Time Distributions in Risk Analysis // American Journal of Operations Research. 2017. Vol. 7, № 6. P. 356–371. doi:10.4236/ajor.2017.76027
11. Бутаев М. М., Тарасов А. А. Характеристики равномерно распределенных случайных значений продолжительности параллельной обработки запроса инфокоммуникационной системой // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике : сб. ст. XX Междунар. науч.-техн. конф. Пенза : Приволжский Дом знаний, 2020. С. 8–23.
12. Martin J. J. Distribution of the Time Through a Directed, Acyclic Network // Operations Research. 1965. Vol. 13 (1). P. 46–66.
13. Вадзинский Р. Н. Справочник по вероятностным распределениям. СПб. : Наука, 2001. 295 с.
14. Butaev M. M., Babich M. Yu., Tarasov A. A., Ivanov A. I., Malygin A. Yu., Sauanova K. T., Sagyndykova Sh. N. Functions of distributions of amounts of uniforally distributed random values of times of processing the request of the infocommunication system // News of the national academy of sciences of the Republic of Kazakhstan. Physico-mathematical series. 2020. Vol. 6, № 334. P. 36–44.
15. Венцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятности и ее инженерные приложения. М. : Высш. шк., 2000. 480 с.
16. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М. : Мир, 1967. Т. 2. 746 с.

References

1. Golenko-Ginzburg D.I. *Stokhasticheskie setevye modeli planirovaniya i upravleniya razrabotkami = Stochastic network models of development planning and management*. Voronezh: Nauchnaya kniga, 2010:284. (In Russ.)
2. Pozewaunig H., Eder J., Liebhart W. ePERT: Extending PERT for Workflow Management Systems. *Proceedings of the First East-European Symposium on Advances in Databases and Information Systems, (ADBIS'97)*. Saint Petersburg, 1997:1–13.
3. Chanas S., Dubois D., Zielinski P. Criticality analysis in activity networks under incomplete information. *Proceedings of the 2nd International Conference in Fuzzy Logic and Technology*. 2001:233–236.
4. Trogemann G., Gente M. Performance analysis of parallel programs based on directed acyclic graphs. *Acta Informatica*. 1997;34:411–428.
5. Ali Sedaghatbaf, Mohammad Abdolahi Azgomi. Software Architecture Modeling and Evaluation Based on Stochastic Activity Networks. *IFIP International Federation for Information Processing. 2015. 6th International Conference on Fundamentals of Software Engineering*. 2015:46–53.

6. Sharma V.S., Trivedi K.S. Quantifying software performance, reliability and security: An architecture-based approach. *Journal of Systems and Software*. 2007;80:493–509.
7. Nadas A. Probabilistic PERT. *IBM Journal of Research and Development*. 1979;23(3):339–347.
8. Len V.L. Estimation of the work time of the command post of the army of the air force and air defense at the stage of making a decision on military operations. *Voennaya mysl' = Military thought*. 2020;(8):97–100. (In Russ.)
9. Hajdu M., Bokor O. The Effects of Different Activity Distributions on Project Duration in PERT Networks. *27th IPMA World Congress. Procedia - Social and Behavioral Sciences*. 2014;119:766–775.
10. Ebong D.W. A Review of Activity Time Distributions in Risk Analysis. *American Journal of Operations Research*. 2017;7(6):356–371. doi:10.4236/ajor.2017.76027
11. Butaev M.M., Tarasov A.A. Characteristics of uniformly distributed random values of the duration of parallel processing of a request by an infocommunication system. *Problemy informatiki v obrazovanii, upravlenii, ekonomike i tekhnike: sb. st. XX Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf. = Problems of informatics in education, management, economics and technology: proceedings of the 20th International scientific and engineering conference*. Penza: Privolzhskiy Dom znaniy, 2020:8–23. (In Russ.)
12. Martin J.J. Distribution of the Time Through a Directed, Acyclic Network. *Operations Research*. 1965;13(1):46–66.
13. Vadzinskiy R.N. *Spravochnik po veroyatnostnym raspredeleniyam = Handbook of probability distributions*. Saint Petersburg: Nauka, 2001:295. (In Russ.)
14. Butaev M.M., Babich M.Yu., Tarasov A.A., Ivanov A.I., Malygin A.Yu., Sauanova K.T., Sagyndykova Sh.N. *Functions of distributions of amounts of uniforally distributed random values of times of processing the request of the infocommunication system. News of the national academy of sciences of the Republic of Kazakhstan. Physico-mathematical series*. 2020;6(334):36–44.
15. Ventsel' E.S., Ovcharov L.A. *Teoriya veroyatnosti i ee inzhenernye prilozheniya = Probability theory and its engineering applications*. Moscow: Vyssh. shk., 2000:480. (In Russ.)
16. Feller V. *Vvedenie v teoriyu veroyatnostey i ee prilozheniya = Introduction to probability theory and its applications*. Moscow: Mir, 1967;2:746. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Михаил Матвеевич Бутаев

доктор технических наук,
профессор, ученый секретарь,
Научно-производственное
предприятие «Рубин» (Россия,
г. Пенза, ул. Байдукова, 2)

E-mail: nts@npp-rubin.ru

Mikhail M. Butaev

Doctor of engineering sciences, professor,
scientific secretary, Research
and Production Enterprise “Rubin”
(2 Baidukova street, Penza, Russia)

Андрей Анатольевич Тарасов

кандидат технических наук, генеральный
директор Научно-производственного
предприятия «Рубин» (Россия,
г. Пенза, ул. Байдукова, 2)

E-mail: mail@npp-rubin.ru

Andrey A. Tarasov

Candidate of engineering sciences, director-
general, Research and Production Enterprise
“Rubin”, (2 Baidukova street, Penza,
Russia)

Поступила в редакцию / Received 20.04.2022

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 07.07.2022

Принята к публикации / Accepted 23.08.2022